Applications linéaires

Exercice 1. Pour chaque paire E, F d'espaces vectoriels et chaque application de E dans F indiquer si elle est linéaire ou non en justifiant la réponse.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x+y-1$, $f_3(x,y) = 2x$, $f_4(x,y) = xy$.
2. $E = F = \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y) = (2x, x-y)$, $f_2(x,y) = (x-y, 1)$, $f_3(x,y) = (x(y-2), x)$.
3. $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}^2$, $f_1(x,y,z) = (2x-3y+5z, 2y)$.

Exercice 2. Donner une base du noyau de chacune des application linéaires $f : E \to F$ suivantes.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $f(x,y) = x-y$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+2y-z$.
3. $a \in \mathbb{R}$, $E = \mathcal{M}_{4,1}$, $F = \mathcal{M}_{3,1}$,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & -a+1 & a & a-1 \\ -a+6 & a-2 & -a+4 & -a+2 \\ a-5 & -a+2 & a-3 & a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Donner une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires $f : E \to F$ suivantes.

1. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^2$, $f(x) = (3x, -3x)$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2 & -3 & -1 \\ -a+1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(1,0,0) = (1,0,2) \quad f(0,1,0) = (0,2,6) \quad f(0,0,1) = (-2,2,2)$$

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $f(x,y,z)$.
2. Trouver une base de $\mathrm{Im}f$ et en donner une description cartésienne.
3. En déduire $\mathrm{dimKer}f$. Donner une base de $\mathrm{Ker}f$.
4. Vérifier que $\mathrm{Ker}f$ et $A = Vect((1,1,0),(1,0,1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que l'application g de A dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$g(1,1,0) = (1,0,2) \quad g(1,0,1) = (0,2,6)$$

est un isomorphisme de A sur $\mathrm{Im}f$

Exercice 5. Donner la matrice dans les bases B, C de E, F, et aussi dans les bases B', C' le cas échéant, de l'application linéaire $f : E \to F'$.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, B, C sont les bases canoniques et $f(x,y) = (y+z, x+z, x+y)$.
2. $E = F = \mathbb{R}^2$, $B = C$ est la base canonique, $B' = C' = ((1,1),(-1,1))$ et $f(x,y) = (y,x)$.

3. $E = F = \mathbb{R}^2$, $B = C$ est la base canonique, $B' = C' = ((2,1),(1,1))$ et $f(x,y) = (-2x+4y, -x+2y)$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, B, C sont les bases canoniques et $f(x,y,z) = (y+z, x+z)$. Donner aussi des bases B', C' telles que la matrice de f dans B', C' soit égale à $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $f(x,y,z)$.
2. Déterminer Ker f.
3. Trouver une base Im f. A quelle relation doivent satisfaire les coordonnées d'un point générique (a,b,c) pour qu'il appartienne à Im f ?

Exercice 7. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x-2y+2z, x+2y-z, -y+z)$ est bijective et calculer sa réciproque.

Exercice 8. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(1,0,0) = (1,0,2) \quad f(0,1,0) = (0,2,6) \quad f(0,0,1) = (-2,2,2)$$

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $f(x,y,z)$.
2. Trouver une base de Imf et en donner une description cartésienne.
3. En déduire dimKer$f$. Donner une base de Ker$f$.
4. Vérifier que Ker$f$ et $A = Vect((1,1,0),(1,0,1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que l'application g de A dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$g(1,1,0) = (1,0,2) \quad g(1,0,1) = (0,2,6)$$

est un isomorphisme de A sur Imf

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E}$, on considère les vecteurs

$$v_1 = e_1 + e_2, v_2 = 2e_2 + e_3 \text{ et } v_3 = e_1 + 3e_2.$$

1. Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$ et calculer son inverse P^{-1}.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice dans la base $\mathcal{E}$ de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$.
4. Calculer le rang de f et donner une base de Imf. Donner une base de $Kerf$.
5. Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.